ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2018, № 2

УДК 536.421

М.Г. Бердник
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Україна
пр. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, 49005

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У ДОВІЛЬНИХ ОБЛАСТЯХ ПРИ ЕЛЕКТРОННО-ПРОМЕНЕВОМУ ЗВАРЮВАННІ

M.G. Berdnyk
National Technical University Dnipro Polytechnic, Ukraine
19, Dmitry Yavornytsky av., Dnipro, 49005

MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE FIELDS IN CROSS-BORDER AREAS AT ELECTRONIC RADIATION WELDING

У статті вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні у вигляді крайової задачі математичної фізики для пароболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. Тепловий потік у тілі при зварюванні моделювався точковим джерелом тепла, що рухається по контуру тіла з сталою швидкостью за допомогою функції Дірака. Було побудоване нове інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого, а також методів кінцевих елементів і Гальоркіна, знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду.

Ключові слова: дельта функції Дірака, мультиіндекс, інтегральне перетворення

In the article for the first time a mathematical model for calculating temperature fields in arbitrary domains with electron-beam welding in the form of a boundary value problem of mathematical physics for a steam-wave heat equation with boundary conditions of Neumann is constructed. The heat flux in the body during welding was modeled by the point source of heat moving along the contour of the body with a constant velocity using the Dirac function. A new integral transform for a two-dimensional finite space was constructed, with the application of which, as well as finite element and Galerkin methods, a temperature field was found in the form of a convergent series.

Keywords: delta functions Dirac, multi-index, integral transformation

Вступ

У виробництві зварних конструкцій все більшого поширення набувають тугоплавкі, жароміцні, антикорозійні і радіаційно-стійкі матеріали, для зварювання яких потрібні особливі методики: такі як електронно-променеве зварювання, при якому температура активної робочої зони досягає в тисячу разів більших показників, ніж при традиційних способах.

Даний вид зварювання широко застосовується при зварюванні високоміцних легованих сталей і сплавів на титановій основі, а також таких металів як молібден, тантал, ніобій, вольфрам, цирконій, берилій при точній обробці і зварюванні різних мікродеталей. Використовується у таких галузях як ракетобудування, ядерна енергетика, точне приладобудування, мікроелектроніка та багатьох інших.

Постановка проблеми

Залежно від конструкційних особливостей установки, електронно-променеве зварювання може проводитися переміщенням променю щодо зафіксованої деталі. Тепловий потік у виробі при зварюванні моделюють зосередженими, розподіленими по поверхні або об'ємними джерелами тепла.

Труднощі вивчення фізичних явищ у зоні впливу електронного променю обходять шляхом введення певного джерела теплоти і використання теорії теплопровідності. Такі підходи в ряді випадків дають можливість швидше отримати методики інженерних розрахунків процесу, ніж детальний аналіз фізичних явищ. Тому подальший розвиток методів розрахунку температурних полів зварних виробів є актуальною науково-технічною проблемою, що дозволить отримати більш ефек-

тивні і обґрунтовані рішення про напружено-деформований стан при зварюванні.

Ось чому до числа проблем, що представляють великий теоретичний і практичний інтерес, належить проблема вивчення температурного поля у тілах при електронно-променевому зварюванні.

У даній роботі будемо розглядати електронно-променеве зварювання як спосіб з'єднання тіл довільної конфігурації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Зарубіжними дослідниками для моделювання теплового потоку при зварюванні і розрахунку температурних полів звареної конструкції застосовується модель об'ємного джерела тепла [3], у якій тепловий потік, розподілений згідно з законом Гаусса, діє всередині подвійного еліпсоїда. Однак застосування цієї моделі вимагає від дослідника попереднього знання характерних розмірів зварювальної ванни (довжини, ширини, глибини), що пов'язано з необхідністю проведення натурних експериментів для обраних режимів зварювання.

Для визначення температурного поля при зварюванні широко використовують як аналітичні [1-4], так і чисельні методи [5-6]. Однак, складність термомеханічних процесів, що протікають при зварюванні в малих за розміром зонах впливу лазерного променю на матеріал, часто унеможливлює розрахунок температурних полів для конструкції заданої геометрії.

Подальший розвиток методів розрахунку температурних полів зварних виробів є актуальною науково-технічною проблемою, що дозволить отримати більш ефективні і обґрунтовані рішення про напружено-деформований стан при зварю-ванні.

Тому в даній роботі пропонується метод розрахунку температурних полів у довільних областях при електронно-променевому зварюванні.

Мета статті

Побудова нової математичної моделі розрахунку температурних полів у довільних областях при електронно-променевому зварюванні у вигляді крайової задачі математичної фізики, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо розрахунок температурного поля при з'єднанні тіл довільної конфігурації електронно-променевим зварюванням. Нехай $D \subset R^2 -$ обмежена область із замкненим кусково-гладким контуром Г, а $\bar{n} -$ зовнішня одинична нормаль до Г, то тепловий потік у тілі при зварюванні будемо моделювати точковим джерелом тепла, що рухається по контуру Г зі швидкістю V з інтенсивністю Q.

Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на зовнішній поверхні відомі значення теплового потоку $G_1(x, y)$.

З урахуванням прийнятих допущень, математично задача визначення температурного поля $T(x, y, t)$ складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності в області D:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right] + \frac{Q \cdot \delta\left(\int\limits_{OP} dl - Vt\right)}{c\rho\left(T_{\max} - G_0\right)} \quad (1)$$

з початковою умовою

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad (2)$$

і граничною умовою

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}}\right|_{\Gamma} = \Lambda(x, y), \quad (3)$$

де $T(x, y, t)$ – температура тіла; γ – щільність матеріалу; c – питома теплоємність;

λ – коефіцієнт теплопровідності; $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності;

δ(x) – дельта функції Дірака; $\theta = \frac{T(x, y, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$ – відносна температура

тіла; $\Lambda(x,y)=\dfrac{G_1(x,y)}{T_{\max}-G_0}$; $\int\limits_{OP} dl$ – криволінійний інтеграл; О – початкова точка знаходження точкового джерела тепла; Р – поточна точка знаходження точкового джерела тепла.

Для розв'язання крайової задачі (1)-(3) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar f(\mu_k)=\iint\limits_{D}\phi(x,y,\mu_k)\cdot f(x,y)d\sigma, \quad (4)$$

де $\phi(x,y,\mu_k)$, μ_k – власні функції і власні значення.

Класична проблема власних значень і власних функцій формулюється як задача про визначення значень числових параметрів (власні значення) μ_k і функцій (власні функції) $\phi(x,y,\mu_k)$, які тотожно нерівні нулю в області D та задовольняють рівнянню:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\mu_k\cdot\phi=0 \quad (5)$$

і граничний умові:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial\vec n}\right|_{\Gamma}=0, \quad (6)$$

де $\phi(x,y,\mu_n)\subset C^2(D)=\{u(x,y)\in C(D):$ $\partial_\alpha u(x,y)\in C(D),\ \forall\alpha,\ |\alpha|\le 2\ \}$;

$\partial_\alpha u(x,y)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u(x,y)}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}}$; $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$ – мультиіндекс, компоненти якого є цілі невід'ємні числа.

Знайдемо власні значення μ_k і власні функції $\phi(x,y,\mu_k)$ із розв'язку задачі (5)-(6) за допомогою методів кінцевих елементів і Гальоркіна. Для цього зробимо розбиття області на симплекс елементи (рис. 1):

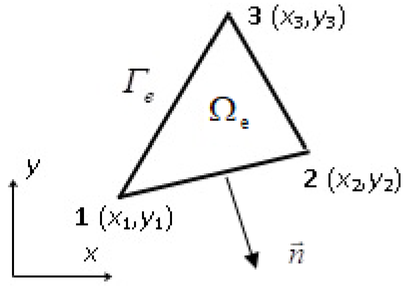


Рис. 1. Трикутний елемент порядку.

Тоді функція $\phi_e(x,y)$ всередині симплекс елемента виражається через функції форми N_1, N_2 и N_3 із відомими значеннями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 у вершинах трикутника:

$$\phi_e(x,y)=N_1\phi_1+N_2\phi_2+N_3\phi_3=$$

$$[N_e]^T\{\phi_e\}, \quad (7)$$

де $[N_e]=[N_1,N_2,N_3]^T$; $\{\phi_e\}=\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}^T$; нижній індекс (е) означає довільний симплекс елемент.

Для і-го вузла (і = 1, 2, 3) функції форми мають вигляд:

$$N_i(x,y)=\frac{1}{2S_e}(a_i+b_ix+c_iy),$$

де

$S_e=\dfrac{1}{2}[(y_3-y_1)(x_2-x_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]$;

$a_i=x_jy_k-x_ky_j$; $b_i=y_j-y_k$; $c_i=x_k-x_j$;

S_e – площа трикутного елемента; (x_1,y_1), (x_2,y_2) і (x_3,y_3) – координати його вершин; i,j,k – послідовна нумерація вузлів симплекс елемента при обході їх проти годинникової стрілки.

Для визначення функцій форми N_1, N_2, N_3 зручно використовувати L_i координати всередині симплекс елемента, які визначаються відношенням площі трикутника, утвореного точкою і стороною, протилежною вершині i, до загальної площі трикутника:

$$L_1 = \frac{1}{2S_e} \cdot \left[\varsigma_1 (x - x_2) + \nu_1 (y - y_2)\right],$$

$$L_2 = \frac{1}{2S_e} \cdot \left[\varsigma_2 (x - x_3) + \nu_2 (y - y_3)\right],$$

$$L_3 = \frac{1}{2S_e} \cdot \left[\varsigma_3 (x - x_1) + \nu_3 (y - y_1)\right],$$

де $\varsigma_1 = y_2 - y_3$; $\varsigma_2 = y_3 - y_1$; $\varsigma_3 = y_1 - y_2$; $\nu_1 = x_3 - x_2$; $\nu_2 = x_1 - x_3$, $\nu_3 = x_2 - x_1$.

У разі лінійного симплекс елемента, що містить три вершини, функції форми збігаються з відповідними L_i координатами:

$$N_1 = L_1,\ N_2 = L_2,\ N_3 = L_3.$$

Для представлення задачі на власні значення в матричній формі використаємо метод Гальоркіна. Підставимо в рівняння (5) наближений розв’язок (7), тоді отримаємо рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)[N_e]^T \{\phi_e\} + .$$

$$\mu_k\, [N_e]^T \{\phi_e\} = 0 \qquad (8)$$

Множення у лівій частині рівняння (8) на функцію форми $[N_e]$, та інтегрування по елементу *e* дає:

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \{0\} \qquad (9)$$

$$I_1 = \iint_{\Omega_e} [N_e] \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) [N_e]^T\, dxdy \{\phi_e\};$$

$$I_2 = \mu_k \iint_{\Omega_e} [N_e][N_e]^T\, dxdy \{\phi_e\}.$$

Інтегруючи I_1 по x і y, отримаємо:

$$I_1 = I_3 - I_4,$$

де

$$I_3 = \left[\int_{\Gamma_e} [N_e] \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} dy + \right.$$

$$\left. \int_{\Gamma_e} [N_e] \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} dx \right] \cdot \{\phi_e\};$$

$$I_4 = \left\{ \iint_{\Omega_e} \left[\frac{\partial [N_e]}{\partial x} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} + . \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} \right] dxdy \right\} \{\phi_e\}.$$

Враховуючи тотожне співвідношення

$$\int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx =$$

$$\int_{\Gamma} \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right) = \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma,$$

отримуємо

$$I_3 = \left[\int_{\Gamma_e} [N_e] \frac{\partial [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\phi_e\},$$

де $\partial / \partial n$ – похідна по зовнішньої нормалі; $\int_{\Gamma} d\Gamma$ – криволінійний інтеграл по межі.

Тоді (9) набуває вигляду:

$$\left[\int_{\Gamma_e} [N_e] \frac{\partial [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\phi_e\} -$$

$$\iint_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial [N_e]}{\partial x} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} + \frac{\partial [N_e]}{\partial y} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial y} \right\} \cdot$$

$$dxdy \cdot \{\phi_e\} +$$

$$\mu_k \iint_{\Omega_e} [N_e][N_e]^T\, dxdy \{\phi_e\} = \{0\} \quad (10)$$

Сумування по всіх елементах у (10) дає:

$$\sum_e \left[\int_{\Gamma_e} [N_e] \frac{\partial [N_e]^T}{\partial n} d\Gamma \right] \{\phi_e\} +$$

$$\mu_k \sum_e \iint_{\Omega_e} [N_e][N_e]^T\, dxdy \{\phi_e\} -$$

$$\sum_e \iint_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial [N_e]}{\partial x} \frac{\partial [N_e]^T}{\partial x} + \right.$$

$$\left.\frac{\partial[N_e]}{\partial y}\frac{\partial[N_e]^T}{\partial y}\right\}dxdy\{\phi_e\}=\{0\}. \quad (11)$$

Помноживши перший доданок (11) на вираз $\{\phi_e\}\{\phi_e\}^T$, одержуємо:

$$I_3=\sum_e\{\phi_e\}^T\left[\int_{\Gamma_e}[N_e]\frac{\partial[N_e]^T}{\partial n}d\Gamma\right]\{\phi_e\}=$$

$$\sum_e\left[\int_{\Gamma_e}\left(\{\phi_e\}^T[N_e]\right)\cdot\frac{\partial\left([N_e]^T\{\phi_e\}\right)}{\partial n}d\Gamma\right]=$$

$$\sum_e\left[\int_{\Gamma_e}\phi_e\frac{\partial\phi_e}{\partial n}d\Gamma\right].$$

При цьому криволінійні інтеграли по межах Γ_e елементів усередині області D скорочуються, оскільки напрями обходу межі при обчисленні криволінійних інтегралів протилежні для кожної пари сусідніх елементів. У результаті залишається тільки криволінійний інтеграл по межі Г всієї області D.

Тоді, враховуючи граничну умову Неймана, можна знехтувати першим доданком у (11). Отже, (11) набуває вигляду:

$$\left([K]+\mu_k[M]\right)\{\phi\}=\{0\} \quad (12)$$

де

$$[K]=-\sum_e\iint_{\Omega_e}\left\{\frac{\partial[N_e]}{\partial x}\frac{\partial[N_e]^T}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial[N_e]}{\partial y}\frac{\partial[N_e]^T}{\partial y}\right\}dxdy$$

$$[M]=\sum_e\iint_{\Omega_e}[N_e][N_e]^T dxdy;$$

$$\{\phi\}=\sum_e\{\phi_e\}$$

Таким чином власні функції $\phi(x,y,\mu_k)$ і власні значення μ_k знаходяться із (12), а формула оберненого перетворення має вигляд [7]:

$$\mathrm{f}(\rho,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi(\rho,z,\mu_k)}{\|\phi(\rho,z,\mu_k)\|^2}\bar{f}(\mu_k). \quad (13)$$

Застосовуємо до диференціального рівняння (1) інтегральне перетворення (4). У результаті отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt}+a\mu_k\bar{\theta}=\Omega(t) \quad (14)$$

з початковою умовою

$$\bar{\theta}(0)=0, \quad (15)$$

де

$$\Omega(t,\mu_k)=.\frac{Q}{c\rho(T_{\max}-G_0)}\cdot$$

$$\iint_D\phi(x,y,\mu_k)\cdot\delta\left(\int_{OP}dl-Vt\right)d\sigma+$$

$$\oint_\Gamma\phi(x,y,\mu_k)\Lambda(x,y)dl;$$

Г-додатно орієнтований контур.

Розв’язавши диференціальне рівняння (14) з початковою умовою (15), одержуємо:

$$\bar{\theta}(\mu_k,t)=\int_0^t\Omega(x,\mu_k)\cdot e^{a\mu_k(x-t)}dx$$

Таким чином, з урахуванням формули оберненого перетворення (13) отримуємо шукане температурне поле $\theta(x,y,t)$:

$$\theta(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\theta}(\mu_k,t)\cdot\frac{\phi(x,y,\mu_k)}{\|\phi(x,y,\mu_k)\|^2}.$$

Висновки

У статті вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні у вигляді крайової задачі математичної фізики для параболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. Тепловий потік у тілі при зварюванні моделювався точковим джерелом тепла, що рухається по контуру тіла з сталою швидкістю за допомогою функції Дірака. Було побудоване нове інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із засто-

суванням якого, а також методів кінцевих елементів і Гальоркіна, знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду. Знайдено розв'язок крайової задачі теплообміну в довільних областях при електронно-променевому зварюванні може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у тілах довільної конфігурації.

Література

1. John A. Golda. Computational welding mechanics / John A. Goldak, Mehdi Akhlaghi. – USA: Springer, 2005. – 325 p.
2. Винокуров В.А. Теория сварочных деформаций и напряжений / В.А. Винокуров, А.Г. Григорьянц. – М. Машиностроение, 1984. – 280 с.
3. Гатовский К.М. Теория сварочных деформаций и напряжений / К.М. Гатовский, В.А. Кархин. – Л. : Ленингр. кораблестроит. ин-т, 1980. – 331 с.
4. Прохоренко В.М. Напруження та деформації у зварних з'єднаннях і конструкціях / В.М. Прохоренко О.В. Прохоренко. – К.: НТУУ «КПІ», 2009. – 268 с.
5. Liu G. R. The Finite Element Method: A Practical Course / G. R. Liu, S. S. Quek. – Butterword Heinemann., 2003. – 348 p.
6. Галлагер Р. Метод конечных элементов. / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1986. – 428 с.
7. Бердник.М.Г. Математична модель і метод рішення узагальненої задачі Неймана теплообміну кусково-однорідного циліндра / М.Г. Бердник // Науковий вісник НГУ. – 2017. – № 4. – С. 86-91.

References

1. John A. Goldak. Computational welding mechanics. / John A. Goldak, Mehdi Akhlaghi. - USA: Springer, 2005. – 325 p.
2. Vinokurov V. A. Teorija svarochnyh deformacij i naprjazhenij / Vinokurov V. A., Grigor'janc A.G. - M: Mashinostroenie, 1984. 280 s.
3. Gatovskij K.M. Teorija svarochnyh deformacij i naprjazhenij Leningr: / K. M. Gatovskij, V.A. Karhin -L: Leningr. korablestroit. in-t, 1980. 331 s.
4. Prohorenko V.M. Napruzhennja ta deformacії u zvarnih z'єdnannjah i konstrukcijah / V.M. Prohorenko, O.V. Prohorenko Kyiv: NTUU «KPI», 2009. 268 s.
5. Liu G. R. The Finite Element Method: A Practical Course / G. R. Liu, S. S. - Quek. Butterword Heinemann., 2003. 348 p.
6. Gallager R. Metod konechnyh jelementov. Osnovy / R. Gallager. M: Mir, 1986. 428 s.
7. Berdnik M.G. Matematichna model i metod rishennja uzagalnenoї zadachi Nejmana teploobminu kuskovo-odnoridnogo cilindra / M.G. Berdnik // Naukovij visnik NGU. – 2017. – № 4. – S. 86-91.

RESUME

M.G. Berdnyk

Mathematical modeling of temperature fields in cross-border areas at electronic radiation welding

In the article for the first time a mathematical model for calculating temperature fields in arbitrary bounded regions with a closed piecewise smooth contour under electron-beam welding in the Cartesian coordinate system in the form of a boundary value problem for a parabolic equation of thermal conductivity with initial and boundary conditions is constructed, provided that the thermophysical properties of the body are constant. At an initial time, the temperature of the body is constant, and on the outer surface of the body are known values of the heat flux which are continuous coordinate functions.

In this paper, the heat flux in the body during welding was modeled by the point source of heat moving along the body's contour with a constant velocity and a known intensity using the Dirac function.

To solve the boundary value problem, a new integral transform for a two-dimensional finite space was constructed. Own values and their own functions for the integral transformation kernel are found using finite element and Galerkin methods. In this case, the division of the area into simplex elements was made. Thus, the problem of finding eigenvalues and eigenfunctions was reduced to the algebraic problem of finding eigenvalues and eigenfunctions.

After application to the obtained boundary value problem of the constructed new integral transformation, we obtained the Cauchy problem whose solutions were found analytically. The obtained solution of the boundary value problem is twice continuously differentiated by spatial coordinates and once per time.

As a result, the temperature field in arbitrary bounded regions with a closed piecewise smooth contour at electron-beam welding is found in the form of convergent series.

The temperature field found in arbitrary bounded regions with a closed piecewise smooth contour at electron-beam welding can be used for modulating the temperature fields that arise when welding a construction of a given geometry.

Надійшла до редакції 11.09.2018